

Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayılar kümesi, reel (gerçel) sayılar kümesinin genişletilmesiyle elde edilen daha büyük bir kümedir. Örneğin $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümü $\mathbb{R}$ kümesi içinde gerçekleşmez. Denklemin çözümünden

$$x^2 = -1$$

olur. Karmaşık sayılar kümesinin birim ögesi olarak tanımlanan $+i$ için

$$\sqrt{-1} = i \text{ (sanal sayı birimi)} \Leftrightarrow i^2 = -1$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece denklemin çözüm kümesi $x = i$ ve $x = -i$ şeklinde elde edilir.

Negatif bir sayının karekökünü kullanan ilk bilim insanı ise kübik denklemler üzerine çalışmalar yapan İtalyan Fontana'dır.

i gösterimini matematiğe Euler kazandırmıştır.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözelim: $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise, denklemin reel kökü olmadığını biliyoruz.

Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $z = a + ib$ biçimindeki sayılara karmaşık (kompleks) sayılar denir.

Gauss cebir temeli teoremi üzerine doktora tezini hazırladığında yirmi iki yaşındadır. Gauss, karmaşık sayılar için $a + bi$ gösterimini doktora tezinde resmi olarak tanıtmıştır. Burada reel sayılar, karmaşık sayıların b 'yi sıfır aldığımızda ortaya çıkan özel bir türü olması dikkat çekmektedir.

Karmaşık sayı genellikle z ve bu sayıların oluşturduğu küme $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde yazılır. $z = a + ib$ karmaşık sayısında;

a 'ya bu sayının reel(gerçel) kısmı denir ve $Re(z)$ ile gösterilir. b 'ye bu sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve $Im(z)$ ile gösterilir.

Kartezyen koordinat sisteminin kaşifi Descartes, bu sayılara “sanal” adını vermiştir.

Örnek: $z = 3 + 2i$ karmaşık sayısının reel ve sanal kısımları sırasıyla $Re(z)=3$, $Im(z)=2$ olur.

Tanım: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z = a + ib$ ve $w = c + id$ olsun.

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

olmasıdır.

Örnek. $z = -2x - i\frac{1}{2}$ ve $w = -4 + 2y.i$ sayılarının eşit olabilmesi için

$$-2x = -4 \Rightarrow x = 2 \text{ ve } \frac{-1}{2} = 2y \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

olmalıdır.

Örnek. $4x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$\Delta = (-2)^2 - 4.4.1 = 4 - 16 = -12 < 0$ olması nedeniyle denklemin karmaşık sayı olan iki kökü vardır:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.4.1}}{2.4} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{8} = \frac{2 \pm 2.\sqrt{3}.i}{8} = \frac{1}{4} \pm i.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Sanal Birimin Kuvvetleri

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, i 'nin kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad i^3 = i^2.i = -i \quad i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4.i = i \quad i^6 = i^5.i = i^2 = -1 \quad i^7 = i^6.i = -i \quad i^8 = i^7.i = -i^2 = 1$$

.....

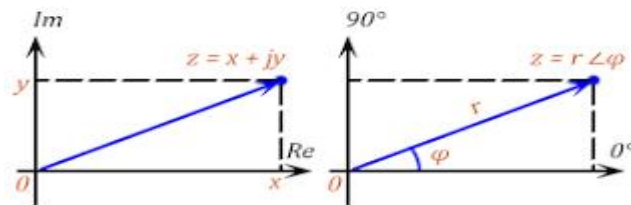
$$i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+4} = 1$$

Örnek. $i^{-30} = i^{-(4.7+2)} = \frac{1}{i^{4.7+2}} = \frac{1}{i^{4.7}.i^2} = -1$

Geometrik Gösterim

$z=x+yi$ sayısına (x,y) ikilisi (noktası) karşılık getirilir. Bu nedenle karmaşık sayılar ile analitik düzlemin noktaları arasında bire-bir eşleme vardır. Oluşan düzleme karmaşık düzlem denir.

Norveçli yerölçümcü ve harita tasarımcısı Caspar Wessel, sanal sayıları geometrik olarak çizen ilk bilim insanıdır.



$0 = 0 + i.0$ sayısı, $O(0, 0)$ noktası ile,

$x = x + i.0$ sayıları, Ox eksenini ile,

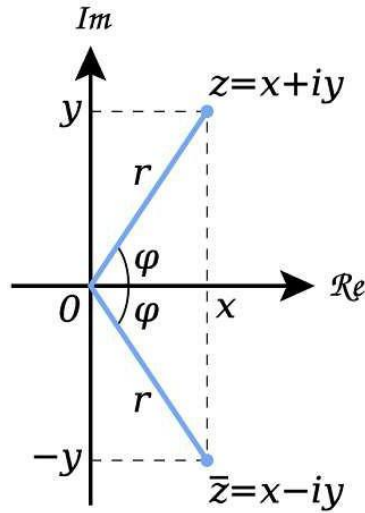
$y = 0 + i \cdot y$ sayıları, Oy eksenini ile eşlenir.

Ox eksenine reel eksen, Oy eksenine sanal eksen denir.

Tanım: $z = x + iy$ ve $w = x - iy$ sayılarından birine diğ erinin eşleniğ i denir. z karmaşık sayısının eşleniğ i $w = \bar{z}$ biçiminde gösterilir.

$$\bar{z} = \overline{(x + iy)} = \bar{x} + \overline{i \cdot y} = x - i \cdot y = w$$

dir.



Bir karmaşık sayı ile eşleniğ i, reel eksene (Ox eksenine) göre simetrikler.

Teorem 1. Bir karmaşık sayının eşleniğ inin eşleniğ i kendisidir.

İspat: $z = x + iy$ karmaşık sayısının eşleğ i $\bar{z} = x - i \cdot y$ olduğ u biliniyor. Tekrar eşleniğ i alınırsa,

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{(x - iy)} = x - i \cdot (-y) = x + i \cdot y = z$$

olur.

Tanım: Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına uzaklığ ına bu sayının modülü veya mutlak değ eri denir.

Karmaşık düzlem üzerinde $x + i \cdot y$ sayısına karşılık gelen nokta Z olsun. OXZ dik üçgeninde,

$$|OZ|^2 = |OX|^2 + |XZ|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{veya} \quad |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

yazılır. Burada $|z|$, $z = x + i.y$ sayısının modülüdür.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ ve $|z| \geq 0$ dir.

Örnek. $z = -6 + 8i$ sayısının modülü $|z| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ olur.

Toplama ve Çıkarma İşlemleri

İki karmaşık sayı $z = a + bi$ ve $w = c + di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i 'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. Bu nedenle,

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

şeklinde tanımlanır. (GeoGebra)

Örnek. $z = 2 - 3i$ ve $w = 1 + 2i$ ise $z + w$ ve $z - w$ toplam ve farklarını bularak karmaşık sayılar düzleminde gösterelim.

$$z + w = (2 - 3i) + (1 + 2i) = (2 + 1) + (-3 + 2)i = 3 - i$$

$$z - w = (2 - 3i) - (1 + 2i) = (2 - 1) + (-3 - 2)i = 1 - 5i$$

Toplama-Çıkarmanın özellikleri

Kapalılık Özelliği: $z, w \in \mathbb{C}$ ve $z = a + i.b$, $w = c + i.d$ olsun.

$$z + w = (a + i.b) + (c + i.d) = (a + c) + i(b + d) \text{ bulunur.}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için $(a + c), (b + d) \in \mathbb{R}$ olduğundan $(z + w) \in \mathbb{C}$ olur. O halde, karmaşık sayılar kümesi toplama işlemine göre **kapalıdır**.

Gauss, karmaşık sayıların cebirsel olarak kapalı olduğunu düzgün bir şekilde ispatlayan ilköğretim matematikçilerden birisidir.

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı: $z, 0 \in \mathbb{C}$, $z = a + i.b$ ve $0 = 0 + i0$ olsun.

$$z + 0 = (a + i.b) + (0 + i.0) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z$$

$$0 + z = (0 + i0) + (a + i.b) = (0 + a) + (0 + b)i = a + i.b = z$$

olur. O halde, sıfır, karmaşık sayılarda toplama işlemine göre **etkisiz (birim) eleman**dır.

Ters Eleman Varlığı: $z \in \mathbb{C}$ ve $z = a + i.b$ ise $-z = -a - i.b$ olsun.

$$z + (-z) = z = a + i.b + (-a - i.b) = (a - a) + i.(b - b) = 0 + i0 = 0$$

$$(-z) + z = (-a - i.b) + (a + i.b) = (-a + a) + i.(-b + b) = 0 + i0 = 0$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, **her elemanın tersi** vardır.

Birleşme Özelliği: $u, v, z \in \mathbb{C}$ ve $u = a + i.b, v = c + i.d, z = x + i.y$ olsun.

$$\begin{aligned}(u + v) + z &= [(a + i.b) + (c + i.d)] + (x + i.y) = [(a + c) + i.(b + d)] + (x + i.y) \\ &= [(a + c) + x] + i[(b + d) + y] = [a + (c + x)] + i[b + (d + y)] \\ &= a + i.b + [(c + x) + i.(d + y)] = u + (v + z)\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılarda toplama işleminin **birleşme özelliği** vardır.

$(\mathbb{C}, +)$ sistemi bir **gruptur**.

Değişme Özelliği: $\forall u, v \in \mathbb{C}$ ve $u = a + i.b, v = c + i.d$ olsun.

$$\begin{aligned}u + v &= (a + i.b) + (c + i.d) = (a + c) + i.(b + d) = (c + a) + i.(d + b) \\ &= (c + i.d) + (a + i.b) = v + u\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinin toplama işlemine göre **değişme özelliği** vardır. $(\mathbb{C}, +)$ sistemi bir **değişmeli gruptur**.

Çarpma İşlemi: İki karmaşık sayı $u = a + i.b$ ve $v = c + i.d$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i 'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. İki polinomun çarpımı işlemi ile dağılma ve birleşme özelliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}u.v &= (a + i.b).(c + i.d) = a(c + i.d) + i.b(c + i.d) = ac + i.ad + i.bc + i^2 bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $u = (3 + i)$ ve $v = (1 + 2i)$ ise $u.v$ yi bulalım:

$$u.v = (3 + i)(1 + 2i) = (3.1 - 1.2) + (3.2 + 1.1)i = 1 + 7i$$

Teorem. Her $z = x + i.y$ karmaşık sayısı için $|z|^2 = z.\bar{z}$ dir.

$$\textbf{İspat: } z.\bar{z} = (x + i.y)(x - i.y) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$$

Çarpımın Özellikleri

Kapalılık Özelliği: $z, w \in \mathbb{C}$ ve $z = a + i.b, w = c + i.d$ olsun.

$$z.w = (a + i.b)(c + i.d) = (ac - bd) + i.(ad + bc)$$

olur. $(ac - bd) \in \mathbb{R}$ ve $(ad + bc) \in \mathbb{R}$ olduğu için iki karmaşık sayının çarpımı yine bir karmaşık sayıdır. Karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre **kapalıdır**.

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı: $z, 1 \in \mathbb{C}$ ve $z = a + bi, 1 = 1 + 0i$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$z.1 = (a + i.b)(1 + i.0) = (a.1 - b.0) + i.(a.0 + b.1) = a + i.b = z$$

bulunur. O halde, $1 = 1 + i.0$ sayısı karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre **etkisiz (birim) eleman**dır.

Ters Eleman Varlığı: z karmaşık sayının çarpma işlemine göre tersi z^{-1} ile gösterilsin.

$$z.z^{-1} = 1$$

olmalıdır. Şimdi bu eşitliği sağlayan z^{-1} sayısını belirleyeceğiz:

$z = a + i.b$ ise

$$\begin{aligned} z.z^{-1} = 1 &\Leftrightarrow (a + i.b).z^{-1} = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{a + i.b} \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{a - i.b}{(a + i.b).(a - i.b)} \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{a - i.b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i.\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

bulunur. $z^{-1} \in \mathbb{C}$ olduğu açıktır. Sıfır hariç, karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre **her elemanın tersi** vardır.

Birleşme Özelliği: $u, v, z \in \mathbb{C}$ ve $u = a + bi, v = c + di, z = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned} (u.v).z &= [(a + i.b)(c + i.d)].(x + i.y) = [(ac - bd) + i.(ad + bc)](x + i.y) \\ &= [(ac - bd).x - (ad + bc)y] + i.[(ac - bd)y + (ad + bc)x] \\ &= (acx - bdx - ady - bcy) + i.(acy - bdy + adx + bcx) \\ &= [a(cx - dy) - b(dx + cy)] + i.[a(cy + dx) + b(cx - dy)] \\ &= (a + i.b)(cx - dy) + (i.a - b).(cy + dx) \\ &= (a + i.b)[(cx - dy) + i.(cy + dx)] = u.(v.z) \end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işleminin **birleşme özeliği** vardır.

Değişme Özelliği: $u, v \in \mathbb{C}$ ve $u = a + bi, v = c + di$ olsun. Reel sayılarda dağılma, birleşme ve çarpma işlemine göre değişme özeliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} u.v &= (a + i.b).(c + i.d) = (ac - bd) + i.(ad + bc) = (ca - db) + i(da + cb) \\ &= (c + i.d).(a + i.b) = v.u \end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işlemine göre **değişme özelliği** vardır.

Sonuç olarak, $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ sistemi çarpma işlemine kapalıdır; etkisiz elemanı vardır; her

elemanın tersi vardır; birleşme ve değışme özelliklerini sağlar. **Değışmeli bir gruptur.**

Dağılma Özelliğı: Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinin varlığını gösterelim:

$u, v, z \in \mathbb{C}$ ve $u = a + i.b, v = c + i.d, z = x + i.y$ olsun.

$$\begin{aligned} u.(v + z) &= (a + i.b)[(c + i.d) + (x + i.y)] = (a + i.b)[(c + x) + i.(d + y)] \\ &= [a(c + x) - b(d + y)] + i.[a(d + y) + b(c + x)] \\ &= (ac + ax - bd - by) + i(ad + ay + bc + bx) \\ &= [(ac - bd) + i.(ad + bc)] + [(ax - by) + i.(ay + bx)] \\ &= [(a + i.b).(c + i.d)]. [(a + i.b).(x + i.y)] \\ &= u.v + u.z \end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan **dağılma özelliğı** vardır. Benzer şekilde, sağdan dağılma özelliğinin varlığı da gösterilebilir.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine *dağılma* özelliğı vardır. O halde $(\mathbb{C} - \{0\}, +, \cdot)$ sistemi bir **cisim**dir.

Teorem. $u, v, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ ve $uw = vw$ ise $u = v$ dir.

İspat: $u = a + i.b, v = c + i.d$ ve $w = x + i.y$ olsun.

$$uw = (a + i.b)(x + i.y) = (ax - by) + (ay + bx)i$$

ve

$$vw = (c + i.d)(x + i.y) = (cx - dy) + i.(cy + dx)$$

olacaktır. $uw = vw$ olması için

$$(ax - by) + i(ay + bx) = (cx - dy) + i.(cy + dx)$$

olmalıdır. Buradan,

$$(ax - by - cx + dy) + i(ay + bx - cy - dx) = 0$$

çıkar. Sol yanın eşleniğı ile çarparsak

$$(ax - by - cx + dy)^2 + (ay + bx - cy - dx)^2 = 0$$

ya da

$$[(a - c)x + (d - b)y]^2 + [(a - c)y + (b - d)x]^2 = 0$$

yazabiliriz. Bu ifadedeki bütün sayılar reel ve $w = x + yi \neq 0$ olduğundan, son eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$a = c \quad \text{ve} \quad b = d$$

olmasıdır. Öyleyse,

$$u = v$$

olur.

Bölme: $u, v \in \mathbb{C}$ ve $u = a + bi$, $v = c + di$, $v \neq 0$ olsun.

$$\frac{u}{v} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{(c + id) \cdot (c - id)} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

olur.

Bölme işlemini ters eleman yardımıyla şöyle tanımlayabiliriz:

$u, v \in \mathbb{C}$ ve $v \neq 0$ olmak üzere $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v} = u \cdot v^{-1}$ dir.

Teorem. $u, v \in \mathbb{C}$ ise, aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$|uv| = |u| \cdot |v|$$

$$\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|}, \quad v \neq 0$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

$$|u| - |v| \leq |u + v|$$

Toplama İşleminin Geometrik Yorumu

İki karmaşık sayının mutlak değerleri toplamı, bu sayıların toplamının mutlak değerinden küçük olamaz. (GeoGebra)

$$|z| + |w| \geq |z + w|$$

Çıkarma İşleminin Geometrik Yorumu

İki karmaşık sayının mutlak değerlerinin farkı, farklarının mutlak değerinden büyük olamaz. (GeoGebra)

$$|z| - |w| \leq |z - w|$$

İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

$z = x + i.y$ ve $w = a + i.b$ iki karmaşık sayı arasındaki uzaklık, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$z = x + i.y$ 'in görüntüsü $A(x, y)$, $w = a + i.b$ 'nin görüntüsü $B(a, b)$ ise

$$|z - w| = |AB| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = |w - z|$$

Örnek: $\{z \mid |z - 1 + i| = 2, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm: $z = x + i.y$ olsun.

$$|z - 1 + i| = 2 \Rightarrow |x + i.y - 1 + i| = 2 \Rightarrow |(x - 1) + i.(y + 1)| = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

olur.

Kutupsal Gösterim

Sıfırdan farklı bir karmaşık sayı $z = a + ib$ olsun. Bu sayının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsünü orijine birleştiren doğru parçasına r ve r nin Ox eksenine pozitif yönde (saatin tersi yönde) oluşturduğu açının ölçüsüne θ diyelim. Dik üçgenden,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|} \text{ veya } b = |z| \sin \theta, \quad \cos \theta = \frac{a}{|z|} \text{ veya } a = |z| \cos \theta$$

yazılır. a ve b yerine değerleri konularak,

$$z = a + ib = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta = |z|. (\cos \theta + i \sin \theta)$$

veya

$$|z| = r \text{ yazılırsa } z = a + ib = r. (\cos \theta + i \sin \theta) = r. \text{cis} \theta$$

elde edilir. Bu biçimdeki gösterime, karmaşık sayıların **kutupsal (veya trigonometrik) gösterimi** denir.

Moivre ve Newton, trigonometriyi karmaşık sayılarla birleştirmiştir.

Sıfırdan farklı $z = a + ib$ karmaşık sayısı için, $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ ve $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$ eşitliklerini sağlayan θ reel sayısına z karmaşık sayısının **argümenti** denir ve $\arg(z) = \theta$ veya $\arg(a + ib) = \theta$ biçiminde gösterilir. $0 \leq \theta < 2\pi$ ise θ ya karmaşık sayının **esas argümenti** denir.

Mutlak değeri ve argümenti verilen bir karmaşık sayıyı bulmak kolaydır. Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentine bu sayının kutupsal koordinatları denir ve $(|z|, \theta)$ veya (r, θ) biçiminde gösterilir.

Karmaşık sayı, θ argümenti radyan cinsinden,

$$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}$$

biçiminde de yazılabilir.

Örnek: $z = 1 + i\sqrt{3}$ sayısının argüment ve esas argümentini bulunuz.

Çözüm: $|z| = r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ve $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow \theta = \arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ olur. Ayrıca θ için eşitliği sağlayan en küçük pozitif reel sayı $\frac{\pi}{3}$ olduğundan, z sayısının esas argümenti $\frac{\pi}{3}$ radyandır. O halde

$$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot [\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}] = 2 \cdot [\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] \text{ olur.}$$

Kutupsal Çarpma ve Bölme

$z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ve $w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü bulalım.

$$\begin{aligned} z.w &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1.r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1.r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \text{ yani } z.w = r_1.r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \text{ bulunur.}$$

Yukarıdaki eşitliklerden,

$$\arg(z.w) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z) + \arg(w)$$

ve

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z) - \arg(w)$$

sonuçlarını çıkarırız.

Örnek: $z = 2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$, $w = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ olmak üzere $z.w$ çarpımını bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } z.w &= 2.3 \cdot [\cos(75^\circ + 45^\circ) + i \sin(75^\circ + 45^\circ)] = 6 \cdot [\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ)] \\ &= 6 \cdot \left(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Örnek: $argz = \frac{\pi}{3}$ ve $argw = \frac{\pi}{6}$ ise $arg\left(\frac{z}{w}\right) = ?$

Çözüm: $arg\left(\frac{z}{w}\right) = argz - argw = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

KARMAŞIK SAYILARIN KUVVETLERİ

$$z = r[\cos\theta + i.\sin\theta]$$

$$z^2 = z.z = r[\cos\theta + i.\sin\theta].r[\cos\theta + i.\sin\theta] = r^2[\cos2\theta + i.\sin2\theta]$$

$$z^3 = z^2.z = r^2[\cos2\theta + i.\sin2\theta].r[\cos\theta + i.\sin\theta] = r^3[\cos3\theta + i.\sin3\theta]$$

⋮

$$z^n = r^n[\cos n\theta + i.\sin n\theta]$$

olur.

Teorem. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos n\theta + i.\sin n\theta$$

dır. Bu eşitliğe **De Moivre eşitliği** denir.

Örnek: $(-1 + i)^6$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ve $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (-1 + i)^6 &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i.\sin \frac{3\pi}{4} \right)^6 = \\ &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos 6 \cdot \frac{3\pi}{4} + i.\sin 6 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 2^3 \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i.\sin \frac{9\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Karmaşık sayıların Kökleri

$u = a + ib = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ sayısının n -inci ($n \in \mathbb{N}^+$) kuvvetten köklerini $\sqrt[n]{u}$ ile göstereceğiz. Bu kökler

$$z = \sqrt[n]{u} \Leftrightarrow z^n = u$$

bağıntısını sağlayan z sayılarıdır.

Gauss karmaşık sayılar cisminde tanımlanmış n 'inci dereceden bir polinom denkleminin n tane çözümü olduğunu ispatlamıştır. Bu, bir polinomun köklerini her zaman bulabileceğimiz anlamına gelir. Bu nedenle günümüz fiziğinde denklem çözümlerinde sıklıkla karmaşık sayılar kullanılmaktadır.

Örneğin, karesi -5 olan bir reel sayı olmadığını biliyoruz; ama karesi -5 olan

$$-5 = 5 \cdot i^2 = (\sqrt{5} \cdot i)^2 \text{ ve } -5 = 5 \cdot i^2 = (-\sqrt{5} \cdot i)^2$$

karmaşık sayıları bulabiliriz. Ancak bunun gibi özel çözüm her zaman mümkün değildir. Karmaşık sayıların köklerini bulmak için aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem (De Moivre Teoremi).

$$u = r[\cos\theta + i \cdot \sin\theta] \text{ ve } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } z^n = u \text{ denkleminin kökleri } k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

olmak üzere

$$z = r^{1/n} \cdot [\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}]$$

şeklindedir.

İspat:

$z^n = u$ denkleminde $u = r[\cos\theta + i \cdot \sin\theta]$ değerini yerine yazıp, De Moivre teoremini uygularsak,

$$z^n = u = r[\cos\theta + i \cdot \sin\theta] \Rightarrow z = [r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)]^{1/n}$$

$$z = r^{1/n} \cdot \left\{ \cos\left[\frac{1}{n} \cdot (\theta + 2k\pi)\right] + i \cdot \sin\left[\frac{1}{n} \cdot (\theta + 2k\pi)\right] \right\}$$

bulunur.

$z^n = u$ denklemini sağlayan z sayılarına u sayısının n -inci kuvvetten kökü denir. Köklerin modülleri eşit ve $\sqrt[n]{|u|}$ dir. Argümentleri ise birbirlerinden farklı olup $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta+2\pi}{n}, \frac{\theta+4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}$ dir. Görüldüğü gibi, verilen bir u karmaşık sayısının n -inci kuvvetten n tane kökü vardır. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi orijinde olan $\sqrt[n]{|u|}$ yarıçaplı çember üzerinde eşit aralıklarla sıralanır.

Örnek. $-z^3 + i = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$z^3 = u = i = 0 + i \Rightarrow r = |u| = 1,$$

$$\cos\theta = \frac{0}{1} = 0, \sin\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \arg u = \theta = \frac{\pi}{2}$$

olup, De Moivre teoreminden

$$z^3 = u = i \Rightarrow$$

$$z = 1^{1/3} \cdot \left[\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right]$$

$$\Rightarrow z = \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]$$

$$k = 0 \text{ için } z_1 = \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \text{ için } z_2 = \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$$

$$k = 2 \text{ için } z_3 = \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = \left[\cos \frac{9\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{9\pi}{6} \right] = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

Örnek. $u = 3 - 4 \cdot i$ sayısının kareköklerini bulunuz.

Çözüm: $z = x + i \cdot y$ ve $z^2 = u$ olsun.

$$u = z^2 \Rightarrow 3 - 4 \cdot i = (x + i \cdot y)^2 \Rightarrow 3 - 4 \cdot i = x^2 + 2 \cdot i \cdot xy - y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = x^2 - y^2 \\ -4 = 2xy \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \end{cases}$$

$$3 = x^2 - \left(\frac{-2}{x} \right)^2 \Rightarrow 3 = x^2 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ için } y = -1 \\ x = -2 \text{ için } y = 1 \end{cases}$$

olur. Bu durumda $z = 2 - i$ ve $z = -2 + i$ olur.